Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Rechnen mit komplexen Zahlen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen. Bestimmen Sie jeweils den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$. Zeichnen Sie die Zahlen in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ein.

a) $z = 2$
b) $z = 3\mathrm{i}$
c) $z = -1 + 2\mathrm{i}$
d) $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$
e) $z = -4 - 3\mathrm{i}$
f) $z = 3 - 5\mathrm{i}$

Aufgabe 2 (1)
Bestimmen Sie zu den Zahlen aus Aufgabe 1 jeweils die entsprechende komplex Konjugierte und zeichnen auch diese in die Zahlenebene ein. Welchen geometrischen Zusammenhang zwischen einer komplexen Zahl und ihrer komplex Konjugierten erkennen Sie?

Aufgabe 3 (1)
Berechnen Sie für folgende komplexe Zahlen z und w jeweils die Summe $z+w$ und zeichnen diese ebenfalls in die Zahleneben aus Aufgabe 1. Was fällt ihnen auf?

a) $z = 2, \quad w = 3\mathrm{i}$
b) $z = -1 + 2\mathrm{i}, \quad w = -4 - 3\mathrm{i}$
c) $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}, \quad w = 2$
d) $z = 3 - 5\mathrm{i}, \quad w = 3 - 5\mathrm{i}$
e) $z = 3\mathrm{i}, \quad w = 3 - 5\mathrm{i}$
f) $z = -1 + 2\mathrm{i}, \quad w = -1 + 2\mathrm{i}$

Aufgabe 4 (1)
Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie für die folgenden Zahlen jeweils den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg z$. Benutzen Sie folgende Formeln:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{|z|}, & \text{falls } b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{|z|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) $z = 3i$
b) $z = 1 + i$
c) $z = -2 + 2i$
d) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
e) $z = -4$
f) $z = 3\sqrt{3} - 3i$
g) $z = -\frac{5}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}i$
h) $z = -6 + 2\sqrt{3}i$
i) $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
j) $z = 5 - 5\sqrt{3}i$
k) $z = -e + ei$
l) $z = \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{10}i$

Wie können Betrag und Argument einer komplexen Zahl geometrisch interpretiert werden?

Aufgabe 5 (1)
Benutzen Sie ihre Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe und stellen die Zahlen aus Aufgabe 3 in Polardarstellung dar.

Bemerkung: Sei $r = |z|$ und $\phi = \arg z$, dann hat z folgende Darstellungen:

$$z = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi) = r \cdot e^{i\phi}.$$

Aufgabe 6 (3)
Seien $z = a+bi$ und $w = c+di$ komplexe Zahlen mit $\arg z = \phi$ und $\arg w = \psi$. Verifizieren Sie folgende Identitäten:

1) $z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i$

2) $z \cdot w = |z|\,|w| \cdot (\cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi))$ Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 6

Rechnen Sie nun mit einer der beiden Formeln für zwei komplexe Zahlen z und w jeweils das Prdoukt $z \cdot w$ aus. Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 3.

a) $z = 1 + i, \quad w = -2 + 2i$

b) $z = -2 + 2i, \quad w = 3\sqrt{3} - 3i$

c) $z = 5 - 5\sqrt{3}i, \quad w = 1 + i$

d) $z = 5 - 5\sqrt{3}i, \quad w = -e + ei$

e) $z = \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{10}i, \quad w = 3\sqrt{3} - 3i$

f) $z = 3\sqrt{3} - 3i, \quad w = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

Aufgabe 7 (3)
Sei $0 \neq z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass für $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ gilt, dass $z \cdot z^{-1} = 1$. Berechnen Sie die multiplikativ Inversen zu folgenden Zahlen.

a) $z = -2 + 2i$

b) $z = -4 - 3i$

c) $z = 3 - 5i$

Aufgabe 8 (2)
Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass $z \cdot \bar{z}$ immer reell ist.

Aufgabe 9 (2)
Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $z = a + bi$. Benutzen Sie entweder die Exponentialdarstellung oder erweitern Sie die Brüche geschickt mit der 3. Binomischen Formel:

a) $z = \frac{1+i}{3i}$

b) $z = \frac{-e+ei}{3i}$

c) $z = \frac{-2+2i}{1+i}$

d) $z = \frac{3\sqrt{3}-3i}{-2+2i}$

e) $z = \frac{5-5\sqrt{3}i}{-e+ei}$

f) $z = \frac{5-5\sqrt{3}i}{3\sqrt{3}-3i}$

Aufgabe 10 (1)

a) Es seien $z_1 = -\dfrac{6-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{6}{1+\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{2+7\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{\mathrm{i}}$.
Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

b) Es seien $z_1 = -\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{4}$, $z_2 = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} - \dfrac{6+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$.
Stellen Sie die Zahlen z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Aufgabe 11 (2) Komplexe Zahlenebene

a) Es gibt genau zwei Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = \mathrm{i}$. Zeichnen Sie die beiden in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie diese.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1 \}$, $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \}$, $C = \left\{ \frac{6+8i}{5} \cdot z \,\middle|\, z \in B \right\}$.

Aufgabe 12 (2) Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

a) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1 \}$ und $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 1 \}$,

b) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \leq 1 \}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 1 \right\}$,

c) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z-1| \leq 4 \}$ und $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}} \right| < 5 \right\}$.

d) $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (2+2i)| \} = |z - (-2-2i)|$.

Aufgabe 13 (3) Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.
Stellen Sie konkret die Zahlen 1, i und $-$i in dieser form dar!

Aufgabe 14 (2) In der folgenden Zeichnung sind die drei Quadrate gleich groß.
Zeigen Sie $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ mit Verwendung komplexer Zahlen.